opracował: dr hab. inż. Jan Magott
e-version: dr inż. Tomasz Kapłon

INSTYTUT CYBERNETYKI TECHNICZNEJ POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
ZAKŁAD SZTUCZNEJ INTELIGENCJI I AUTOMATÓW

Ćwiczenia laboratoryjne z Logiki Układów Cyfrowych

ćwiczenie 207

temat: AUTOMATY MOORE'A I MEALY

1. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z dwoma podstawowymi kategoriami automatów oraz metodami transformacji automatu Moore'a w automat Mealy i odwrotnie.

2. PROGRAM ĆWICZENIA

1. Synteza automatów Moore'a i Mealy realizujących zadane przekształcenie
2. Transformacja automatu Moore'a w automat Mealy i odwrotnie

3. PROBLEMATYKA ĆWICZENIA

Automaty Moore'a i Mealy są automatami z pamięcią realizującymi przekształcenie sekwencji (ciągów liter) wejściowych w sekwencje wyjściowe.

Automaty te rozpoczynają swoje działanie w stanie początkowym. Następnie, kolejno podawane litery alfabetu wejściowego powodują zmianę stanu automatu oraz generację liter alfabetu wyjściowego.

Badane kategorie automatów różnią się sposobem generacji liter alfabetu wyjściowego. W przypadku automatu Moore'a, litera generowana na wyjściu zależy od aktualnego stanu. Automat Mealy wytwarza literę na wyjściu na podstawie stanu, w którym została podana litera alfabetu wejściowego oraz na podstawie tej litery.

Porównajmy automaty Moore'a i Mealy realizujące identyczne przekształcenie zbioru sekwencji wejściowych w zbiór sekwencji wyjściowych. Ponadto zakładamy, że oba automaty są w postaci minimalnej. Przy podanych wymaganiach, automat Moore'a posiada nie mniejszą liczbę stanów niż automat Mealy.

4. WIADOMOŚCI PODSTAWOWE

4.1 Definicje automatu Moore'a i Mealy

Automatem skończonym nazywamy dyskretny przetwornik informacji przekształcający sekwencje wejściowe w sekwencje wyjściowe, w sposób z góry zadany. Zbiór Z liter alfabetu wejściowego, zbiór Y liter alfabetu wyjściowego oraz zbiór Q stanów wewnętrznych są zbiorami skończonymi – stąd nazwa automatu.

Automat pracuje w dyskretnej skali czasu, przy czym punkty tej skali mogą być ponumerowane kolejnymi liczbami naturalnymi. Symbolem $z(t) \in Z$ oznaczamy literę podaną na wejście automatu w punkcie t dyskretnej chwili czasu. W podobny sposób interpretowane są symbole $q(t) \in Q$, $y(t) \in Y$.

opracował: dr hab. inż. Jan Magott
e-version: dr inż. Tomasz Kapłon

Definicja 1

Automat skończony typu Mealy jest szóstka uporządkowaną:
$A = < Z, Q, Y, \Phi, \Psi, q_0 >$,
gdzie:

- Z – alfabet wejściowy,
- Q – zbiór stanów,
- Y – alfabet wyjściowy,
- $\Phi : Z \times Q \rightarrow Q$ – funkcja przejść określająca zmiany stanów,
- $\Psi : Z \times Q \rightarrow Y$ – funkcja wyjść wyznaczająca literę generowaną na wyjściu,
- q_0 – stan początkowy.

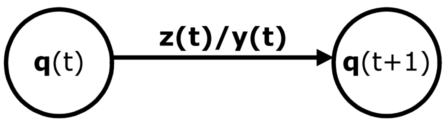
Funkcja przejść określa stan $q(t+1) = \Phi(z(t), q(t))$, który osiągnie automat po podaniu na jego wejście liter z(t), jeśli litera ta została podana w stanie q(t).

Funkcja wyjść definiuje literę alfabetu wyjściowego:

$$y(t) = \Psi(z(t), q(t))$$

generowaną na wyjściu, jeśli w stanie q(t) podano na wejście literę z(t).

Interpretacja graficzna obu funkcji zawarta została na rysunku 1.



rysunek 1

Definicja 2

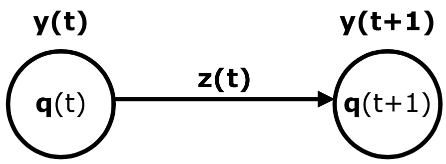
Automat skończony typu Moore'a jest szóstka uporządkowaną:

$$A = < Z, Q, Y, \Phi, \Psi, q_0 >,$$

gdzie składowe Z, Q, Y, Φ oraz q_0 określone są identycznie jak dla automatu Mealy, zaś $\Psi: Q \rightarrow Y$ jest funkcją wyjść.

Funkcja wyjść określa literę: $y(t) = \Psi(q(t))$ generowaną przez automat po osiągnięciu stanu q(t).

Funkcję przejść i wyjść automatu Moore'a zilustrowane są na rysunku 2.



rysunek 2

4.2 Transformacja między automatami Moore'a i Mealy

Niech X* będzie zbiorem wszystkich sekwencji skończonej długości utworzonych z liter alfabetu X wraz ze słowem pustym.

Symbolem /Ψ oznaczamy uogólnioną funkcję wyjść automatu $/\Psi : Z^* \times Q \rightarrow Y^*$. Wartość tej funkcji $/\Psi(/z, q)$ jest sekwencją wyjściową $/y \in Y^*$ generowaną w wyniku podania sekwencji $/z \in Z^*$ na wejście automatu znajdującego się w stanie q.

Definicja 3

Dwa automaty $A_1 = < Z, Q_1, Y, \Phi_1, \Psi_1, q_{01} >$ oraz $A_2 = < Z, Q_2, Y, \Phi_2, \Psi_2, q_{02} >$ nazywamy równoważnymi jeśli dla każdej sekwencji $/Z \in Z^*$ spełniona jest równość:

$/\Psi_1(/z, q_{01}) = /\Psi_2(/z, q_{02})$

Twierdzenie 1

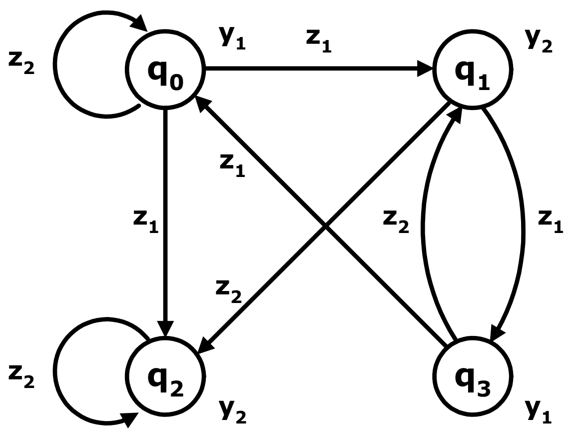
Dla danego automatu Moore'a $A_1 = < Z, Q_1, Y, \Phi_1, \Psi_1, q_{01} >$ istnieje równoważny automat Mealy $A_2 = < Z, Q_2, Y, \Phi_2, \Psi_2, q_{02} >$ takie, że:

$$Q_2 = Q_1,\ \Phi_2 = \Phi_2\ \Psi_2(z ,q) = \Psi_1(\Phi_1(z, q)),\ q_{02} = q_{01}.$$

Transformację automatu Moore'a w automat Mealy zobrazujemy postacią graficzną.

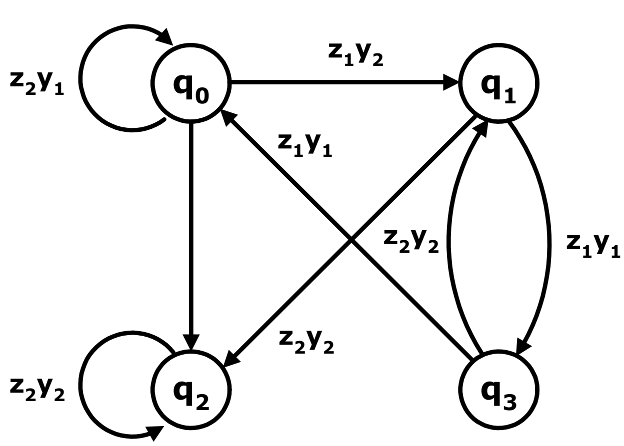
Przykład 1

Niech dany będzie automat Moore'a, jak na rysunku 3.



rysunek 3

Równoważny mu automat Mealy pokazany na rysunku 4.

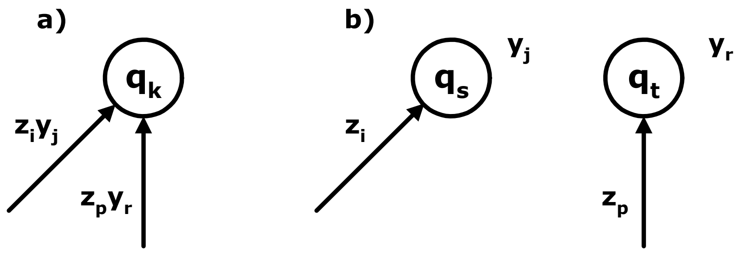


rysunek 4

Przeanalizujmy przykładowe wartości funkcji przejść i wyjść obu automatów.

Niech w stanie q_0 automatu Moore'a, na wejściu pojawi się litera z_1. W tym przypadku dla funkcji przejść mamy $\Phi_1(z_1, q_0) = q_1$. Zatem $\Phi_1(z_1, q_0)= q_2$. ponadto dla funkcji wyjść prawdziwa jest równość $\Psi_1 (q_1) = y_2$, a więc $\Psi_2 (z_1, q_0) = y_2$.

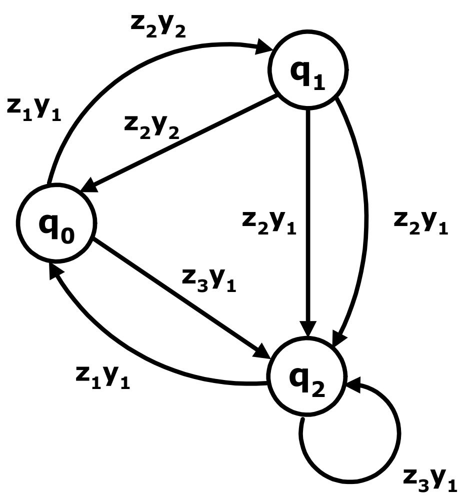
W przypadku transformacji automatu Mealy w automat Moore'a często wymagane jest zwiększenie liczby stanów. Rozważmy fragment grafu automatu Mealy ilustrowany rysunkiem 5a).



rysunek 5

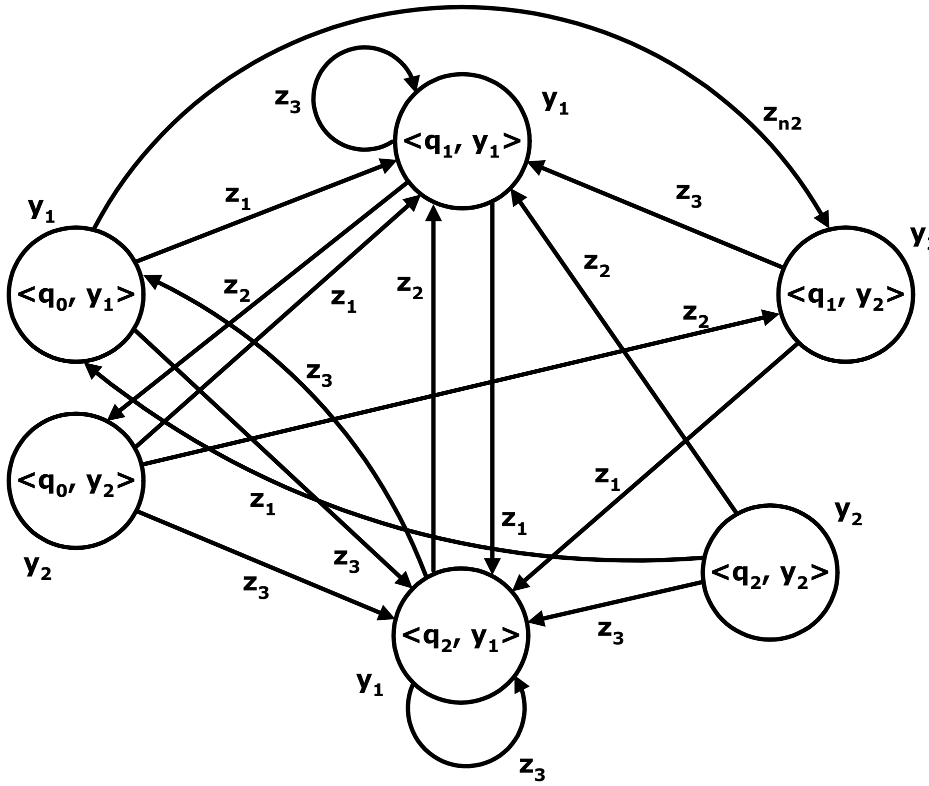
Stanowi q_k automatu Mealy nie można przypisać tylko jednego stanu automatu Moore'a bowiem stan taki musiałby po osiągnięciu go w wyniku podania na wejście litery z_i generować literę y_j, natomiast po osiągnięciu tego stanu poprzez podanie litery z_p musiałby generować literę y_r. W tym przypadku stan q_k automatu Mealy zostanie odwzorowany w dwa stany automatu Moore'a odpowiadające parom uporządkowanym $<q_k, y_j>$ oraz $<q_k, y_r>$. Stany te można oznaczyć symbolami q_s i q_t - rysunek 5b).

Przykład 2



rysunek 6

Wynikiem transformacji automatu Mealy z rysunku 6 jest automat Moore'a pokazany na rysunku 7.



rysunek 7

Stan przyporządkowany parze $<q_2, y_2>$ może być wyeliminowany, bowiem nie może on być osiągnięty z żadnego ze stanów odpowiadających parom $<q_0, y_1>$, $<q_0, y_2>$.

Twierdzenie 2

Dla danego automatu Mealy $A_1 = < Z, Q_1, Y, \Phi_1, \Psi_1, q_{01} >$ istnieje równoważny mu automat Moore'a $A_2 = < Z, Q_2, Y, \Phi_2, \Psi_2, q_{02} >$ zdefiniowany następująco:

$Q_2 = Q_1 \times Y$,
$\Phi_2 : Z \times Q_2 \rightarrow Q_2$ taka, że $\Phi_2 (z, <q, y) =< \Phi_1 (z, q), \Psi_1 (z, q)>$, gdzie $q \in Q_1$,
$\Psi_2 : Q_1 \times Y \rightarrow Y$ takie, że $\Psi2 (<q, y>) = y$,
q_{20} jest jednym ze stanów $<q_{01}, y>$, gdzie $y \in Y$.

4.3 Minimalizacja automatu

W celu uzyskania automatu z minimalną liczbą stanów, należy wykryć stany równoważne i zastąpić je jednym stanem.

Każdy z rozpatrywanym dotąd automatów charakteryzuje się tym, że w każdym z jego stanów może pojawić się na wejściu, każda z liter alfabetu wejściowego. Istnieją automaty, dla których w pewnych stanach podane mogą być na wejście tylko litery z podzbioru Z. Jeśli na wejściu automatu w stanie q_1 nie może być podana litera a_j, wówczas stosujemy następujące oznaczenie dla funkcji przejść $\Phi(z_j, q_j) = -$.

Rozważmy sytuację, w której na wejście automatu w stanie q_i po podaniu litery z_j, następuje zmiana stanu zgodnie z funkcją przejść $\Phi(z_j, q_i) = q_k$, natomiast generowana na wyjściu litera może być dowolna. W tym przypadku dla automatu Mealy stosujemy oznaczenie $\Psi(z_j, q_i = -$, natomiast dla automatu Moore'a $\Psi(q_k) = -$.

Definicja 4

Dwa stany q_i, q_j automatu $A = <Z, Q, Y, \Phi, \Psi, q_0>$ z uogólnioną funkcją wyjść Ψ nazywamy równoważnymi, jeśli dla każdej sekwencji wejściowej $z \in Z^*$ prawdziwa jest równość
$/\Psi(z, q_i) = /\Psi(z, q_j)$,
przy czym symbol "-" w sekwencji wyjściowej może być potraktowany jako równy dowolnej literze alfabetu wyjściowego Y.

Podobnie wartość $\Phi(z, q_k) = -$ funkcji przejść może być interpretowana jako równa dowolnemu stanowi $q \in Q$.

W procesie minimalizacji automatu wykorzystujemy własności, które obecnie przedstawimy.

Rozważmy dwa stany q_i, q_j automatu A. Niech dla każdej litery $z_k \in Z$ spełnione będą równości:

$$\Phi(z_k, q_i) = \Phi(z_k, q_j) \qquad (1)$$
$$\Psi(z_k, q_i) = \Psi(z_k, q_j) \qquad (2a)$$
$$\Psi(q_i) = \Psi(q_j) \qquad (2b)$$

z uwzględnieniem swobody w interpretacji symbolu "-". Wyrażenie (2a) dotyczy automatu Mealy, natomiast wyrażenie (2b), automatu Moore'a.

warunki (1), (2a) lub (2b) są wystarczające dla równoważności stanów q_i, q_j. Warunki te nie są jednak warunkami koniecznymi.

W warunku koniecznym słabiej sformułowane są wymagania nałożone na funkcję przejść. W warunku tym wartość funkcji Φ muszą spełniać wyrażenie (1) lub stany $\Phi(z_k, q_i)$ i $\Phi(z_k, q_j)$ powinny być stanami zrównoważonymi.

Możemy zatem sformułować dla funkcji przejść słabszy warunek równoważności stanów niż wymaganie (1). Załóżmy bowiem, że funkcja przejść dla stanów q_i, q_j, dla każdego $z_k \in Z$ spełnia alternatywnie jeden z trzech warunków:

warunek (1) (3)
$$\Phi(z_k, q_i) = q_i \text{ i } \Phi(z_k, q_j) = q_j \qquad (4)$$
$$\Phi(z_k, q_i) = q_j \text{ i } \Phi(z_k, q_j) = q_i \qquad (5)$$

Wyrażenia (4), (5) wskazują, że wymaganiem dla równoważności stanów q_i, q_j jest ich równoważność. Stąd wyrażenia (3), (4), (5) określają słabszy warunek równoważności niż warunek (1).

Proces wykrywania stanów równoważnych prześledźmy na przykładzie.

Przykład 3

Niech dane będą funkcje przejść i wyjść automatu Mealy opisane tabelą 1.

tabela 1

q \ z	0 0	0 1	1 1	1 0
0	1 , 1	5 , –	—	2 , 1
1	4 , 1	1 , 0	3 , 0	4 , –
2	3 , –	1 , 1	4 , 1	0 , –
3	—	5 , 0	5 , 0	4 , 1
4	2 , 0	3 , 1	3 , 0	5 , 0
5	4 , –	3 , –	5 , 0	—

Obecnie przedstawimy znaczenie poszczególnych elementów tablicy.
Na przykład, gdy automat znajduje się w stanie 4 i otrzymuje na wejściu literę 01, przechodzi do stanu 3, generując na wyjściu literę 1. Na wejściu automatu znajdującego się w stanie 3 nie może być podana litera 00. W tym przypadku, w celu uproszczenia zapisów, w odpowiedniej kratce tabeli umieszczany jest symbol ”--” zamiast ”-, -”. Automat będąc w stanie 5 i otrzymując na wejściu literę 01 może generować dowolną literę wyjściową.

Szukając stanów równoważnych porównujemy ze sobą wszystkie pary wierszy tabeli.

Dwa wiersze opisujące stany q_i, q_j możemy zastąpić jednym, jeśli dla każdej litery $z_r \in Z$, ich składowe q_k, y_p znajdujące się w tej samej kolumnie (odpowiadające tej samej literze z_r alfabetu wejściowego) spełniają jeden z warunków:

1. obie składowe są równe sobie:
   q_p, y_s = q_r, y_t co oznacza, że $q_p = q_r$ i $y_s = y_t$,
2. jedna ze składowych jest ”—” (czyli, równa ”-, -”, a druga może być dowolna,
3. jedna ze składowych równa jest q_p, -, natomiast druga – q_p, y_k dla dowolnego y_k
4. jedna ze składowych jest postaci q_i, y_k, natomiast druga q_j, y_k.

Jeśli zastąpimy dwa wiersze dla stanów q_i, q_j wierszem q_i, to w tablicy pozostawimy wiersz q_i (usuwając q_j) oraz pozycje, w których występował stan q_j zastępujemy stanem q_i pozostawiamy oznaczenie (q_i, q_j) wskazujące na rolę stanu q_i. Proces minimalizacji obrazują tabele 2, 3 i 4.

tabela 2

	q \ z	0 0	0 1	1 1	1 0
	0	1 , 1	3 , –	—	2 , 1
	1	4 , 1	1 , 0	3 , 0	4 , –
	2	3 , –	1 , 1	4 , 1	0 , –
(3 , 5)	3	4 , –	3 , 0	3 , 0	4 , 1
	4	2 , 0	3 , 1	3 , 0	3 , 0

tabela 3

	q \ z	0 0	0 1	1 1	1 0
	0	1 , 1	1 , –	—	2 , 1
(1 , 3 , 5)	1	4 , 1	1 , 0	1 , 0	4 , 1
	2	1 , –	1 , 1	4 , 1	0 , –
	4	2 , 0	1 , 1	1 , 0	1 , 0

tabela 4

	q \ z	0 0	0 1	1 1	1 0
(0 , 2)	0	1 , 1	1 , 1	4 , 1	0 , 1
(1 , 3 , 5)	1	4 , 1	1 , 0	1 , 0	4 , 1
	4	2 , 0	1 , 1	1 , 0	1 , 0

Wynikowy automat na trzy stany zamiast sześciu stanów automatu pierwotnego.

5. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Ćwiczenie przeprowadzane jest z wykorzystaniem zestawu AUT-01. Na płycie czołowej modelu znajduje się 13 lampek sygnalizacyjnych. Lampka umieszczona nad przełącznikiem klawiszowym opisanym MAINS sygnalizuje podłączenie napięć zasilających. Osiem lampek sygnalizacyjnych nad przełącznikami STATE 0 – STATE 7 służy do sygnalizacji stanów automatu, 4 lampki OUTPUT INDICATORS służą do sygnalizacji wyjść automatu oznaczonych symbolami Y0 – Y3.

Elementy manipulacyjne

Przełącznik MAINS służy do przyłączenia napięć zasilających. Zespół czterech przełączników klawiszowych X0 – X3 służy do wprowadzania liter alfabetu wejściowego modelowanego automatu. Wciśnięcia dowolnego z przycisków X0 – X3 odpowiada wprowadzeniu pojedynczej litery alfabetu wejściowego. Na jednym z gniazd FUNCTION X&S pojawia się sygnał utworzony z iloczynu stanu i wprowadzanej litery. Sygnał ten doprowadzony do odpowiednich gniazd STATE EXCITATION lub do gniazd OUTPUT EXCITATION powoduje wzbudzenie następnego stanu, wyzerowanie poprzedniego lub wzbudzenie odpowiedniego wyjścia. Zespół ośmiu przełączników STATE0 – STATE7 służy do ustawiania stanów początkowych automatu. Naciśnięcie dowolnego z tych przełączników powoduje ustawienie nowej zawartości rejestru stanu i wyzerowanie rejestru wyjść.

Gniazda opisane FUNCTION X&S są przeznaczone do łączenia przewodami z gniazdami STATE EXCITATION w celu wzbudzenia stanów i wyjść automatu. Każda para gniazd FUNCTION X&S umiejscowiona na przecięciu wiersza X_n alfabetu wejściowego X z kolumną Sn stanów S odpowiada iloczynowi X_n & S_n.

Każdemu z ośmiu stanów STATE0 – STATE7 odpowiadają 24 gniazda wzbudzenia stanów STATE EXCITATION.

Gniazda OUTPUT EXCITATION umożliwiają doprowadzenie sygnałów wzbudzających do układu wzbudzenia wyjść automatu.

Sygnały wzbudzające są doprowadzone z gniazd FUNCTION X&S w przypadku automatu Moore’a. Każdemu z czterech wyjść odpowiada 16 gniazd wzbudzenia oznaczonych Y0 – Y3.

Gniazda STATE0 – STATE7 umieszczone w dolnej części płyty czołowej służą do wyprowadzenia z nich sygnałów wzbudzających wyjścia w przypadku automatu Moore’a.

Obsługa modelu:

1. Podłączyć przyrząd do sieci.
2. Włączyć napięcia zasilania przełącznikiem MAINS.
3. W momencie załączenia ustawienie stanów i wyjść jest przypadkowe. Przeprowadzić zerowanie wszystkich stanów i ustawić wymagany stan początkowy jednym z przełączników STATE0 – STATE7.
4. Dla zbudowania modelu automatu połączyć gniazda na płycie czołowej zgodnie z zadanymi tabelami przejść i wyjść. Programowanie przejść polega na połączeniu gniazd FUNCTION X&S z odpowiednimi gniazdami STATE EXCITATION. Na przykład, aby dla litery wejściowej X_1 uzyskać przejście S5 $\rightarrow$ S3 należy połączyć gniazdo FUNCTION X1 & S5 z gniazdem S3 z kolumny STATE EXCITATION. Programowanie wyjść dla automatu Mealy jest analogiczne jak programowanie przejść.
5. Przejście automatu ze stanu do stanu i wzbudzenie wyjść zachodzi każdorazowo po wprowadzeniu pojedynczej litery alfabetu wejściowego. Należy to zrealizować przez wciśnięcie odpowiedniego przełącznika X0 – X3. W danym momencie na wejście automatu może być podana tylko jedna litera alfabetu wejściowego, wzbudzony jeden stan i jedno wyjście.

6. ZADANIA DO WYKONANIA

Ćwiczenie jest podzielone na cztery moduły, z których każdy może być wykonany niezależnie.

Moduł A

1. Zaprojektować automat Moore'a będący sumatorem szeregowym liczb dwójkowych.
2. Zrealizować automat i sprawdzić jego działanie.
3. Podać równoważny automat Mealy i porównać obydwa modele.
4. Analogiczne czynności przeprowadzić dla subtraktora szeregowego z tym, że najpierw zaprojektować automat Mealy, z potem podać równoważny automat Moore'a.

Moduł B

1. Zaprojektować i zrealizować na stanowisku automat Mealy, który:
   a) po wprowadzeniu litery X1 wyprowadza literę Y1 niezależnie od następnych liter,
   b) po literze X2 i co najmniej jeszcze jednej dowolnej literze, literę Y2,
   c) po literze X3 i co najmniej dwu dowolnych liter, literę Y3,
   d) jako czwarte potraktować fakt nie wyprowadzania żadnej litery spośród Y1, Y2, Y3.
2. Sprawdzić poprawność realizacji wyżej wymienionego algorytmu.
3. Podać równoważny automat Moore'a.

Moduł C

1. Zadany automat Moore'a w formie tablicy przejść i wyjść przekształcić w automat Mealy.
2. Wykonać model automatu Mealy i sprawdzić poprawność translacji słów wejściowych w słowa wyjściowe.
3. W analogiczny sposób dokonać zmiany automatu Mealy na model Moore'a.

opracował: dr hab. inż. Jan Magott
e-version: dr inż. Tomasz Kapłon

Moduł D

1. Zaproponować algorytm „otwierania zamka” oraz sygnalizacji alarmu (włamania) w przypadku wprowadzenia nieprawidłowej kombinacji liter wejściowych. Podać tablicę przejść i wyjść oraz graf automatu.
2. Wykonać model „zamka”.
3. Dokonać prób „otwarcia” przez osoby nie znające prawidłowej kombinacji otwierającej.

LITERATURA

1. J. Bromirski, Teoria automatów, WNT, Warszawa, 1969
2. W. Majewski, A. Albicki, Algebraiczna teoria automatów, WNT, Warszawa, 1980
3. W. Traczyk, Układy cyfrowe automatyki, WNT, Warszawa, 1974